21/5/18

Έστω $(E, <,>)$ ένας Ευκλείδειος χώρος και $B = \{\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}\}$: ΟΚΒ του E, έστω:
$\vec{x} = x_1 \vec{e_1} + \dots + x_n \vec{e_n}$

Μια απεικόνιση $q: E \to \mathbb{R}$ καλείται τετραγωνική μορφή, αν:

$$q(\vec{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \quad \text{όπου: } a_{ij} = a_{ji}, \quad 1 \le i, j \le n$$

Τότε ο πίνακας $A = (a_{ij})$ είναι ο πίνακας της τετραγωνικής μορφής q ως προς την ΟΚΒ B

Τότε: $q(\vec{x}) = {}^tX \cdot A \cdot X = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} x_k^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n}$

⋮

Έχουν γραφτεί

Ορισμός: Οι κύριοι άξονες της τετραγωνικής μορφής q ορίζεται να είναι τα διανύσματα ΟΚΒ B'.

Θεώρημα κύριων Αξόνων: Αν $q: E \to \mathbb{R}$ είναι μια τετραγωνική μορφή τότε υπάρχει ΟΚΒ P_B του E έτσι ώστε: $q(\vec{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$ όπου $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ οι ιδιότητες του πίνακα της q.
(Αναγωγή της q στους κύριους άξονες)

Παράδειγμα: Έστω η τετραγωνική μορφή
$q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $q(x, y) = xy$
$P_B = \{\vec{e_1} = (1,0), \vec{e_2} = (0,1)\}$: ΟΚΒ του $\mathbb{R}^2$. Ο πίνακας A της q στην P_B είναι ο

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} -t & 1/2 \\ 1/2 & -t \end{vmatrix} = t^2 - \frac{1}{4} = \left(t - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(t + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Ιδιοτιμές του A: $\begin{cases} J_1 = 1/2 \\ J_2 = -1/2 \end{cases}$

Θ.Κ.Α $\Rightarrow$ ΟΚΒ $P_{B'}$ του $\mathbb{R}^2$: $q(x', y') = \frac{1}{2}(x')^2 - \frac{1}{2}(y')^2$

Για την εύρεση των κύριων αξόνων της q, βρίσκουμε βάσεις του $V(1/2)$, $V(-1/2)$ και ακολούθως κάνουμε τις βάσεις αυτές ορθοκανονικές (με τη διαδικασία Gram-Schmidt). Ενώνοντας τις ΟΚΒ των $V(1/2)$, $V(-1/2)$ βρίσκουμε μια ΟΚΒ $P_{B'}$ του $\mathbb{R}^2$ η οποία μας δίνει τους κύριους άξονες.

Παράδειγμα: $q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $q(x,y) = 3x^2 - 6xy - 5y^2$
$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x^2 - 6xy - 5y^2 \cancel{=} 6x + 22y + 24 = 0\}$
$P_B = \{\vec{e}_1 = (1,0), \vec{e}_2 = (0,1)\}$: ΟΚΒ του $\mathbb{R}^2$ και
$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$ ο πίνακας της q

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} 3-t & -3 \\ -3 & -5-t \end{vmatrix} = t^2 + 2t - 24 = (t+6)\cdot(t-4)$$

Ιδιοτιμές του $A = \begin{cases} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = -6 \end{cases}$ Τότε στους κύριους άξονες θα έχουμε: $q(x', y') = 4(x')^2 - 6(y')^2$

$$V(4): \begin{pmatrix} 3-4 & -3 \\ -3 & -5-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x - 3y = 0 \\ -3x - 9y = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow -x - 3y = 0 \Rightarrow x = -3y \Rightarrow$ μια βάση του $V(4)$ είναι η στήλη $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ και μια ΟΚΒ του $V(4)$ είναι η στήλη $f_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Για τον $V(-6)$ μια βάση είναι η $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ και μια ΟΚΒ του $V(-6)$ είναι το $f_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Τότε $P_B' = \left\{ f_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, f_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$: κύριοι άξονες της q

Ισοδύναμα: $P_{B}' = \left\{ \vec{e}_1{}' = \frac{1}{\sqrt{10}}(3,-1), \vec{e}_2{}' = \frac{1}{\sqrt{10}}(1,3) \right\}$

$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$ $P = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$: παριστάνει γεωμετρική στροφή επιπέδου κατά γωνία θ, όπου θ είναι η μοναδική γωνία $\theta \in [0, 2\pi]$ έτσι ώστε: $\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$ | $X = P'x$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3x' + y' \\ -x' + 3y' \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{\sqrt{10}} x' + \frac{1}{\sqrt{10}} y'$$

$$y = -\frac{1}{\sqrt{10}} x' + \frac{3}{\sqrt{10}} y'$$

Τότε: $3x^2 - 6xy - 5y^2 - 6x + 22y + 24 =$
$= 4(x')^2 - 6(y')^2 - 6\left(\frac{3}{\sqrt{10}} x' + \frac{1}{\sqrt{10}} x' + \frac{1}{\sqrt{10}} y'\right) +$
$+ 22\left(-\frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{3}{\sqrt{10}} y'\right) + 29 = 0$

Θέτοντας $X = x' - \frac{5}{\sqrt{10}}$, $Y = y' - \frac{5}{\sqrt{10}}$ Η εξίσωση της C είναι: $4x^2 - 6y^2 = -29$ (Υπερβολή)

ΑΣΚΗΣΗ: $q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $q(x,y,z) = 3x^2+3y^2+2z^2-2xy$

$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x^2+3y^2+2z^2-2xy = 8\}$

$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $P_A(t) = |A - tI_3| = (2-t^2)(4-t) \Rightarrow$ Ιδιοτιμές του A είναι:

$\begin{cases} \lambda_1 = 2 \text{ (διπλή)} \\ \lambda_2 = 4 \text{ (απλή)} \end{cases}$

$V(2)$: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = y$ $\qquad (A - 2I_3) = 0$

Άρα $V(2) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x, z \in \mathbb{R} \right\} =$

$= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x, z \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Το σύνολο: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$: βάση του $V(2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{ F_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, F_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ είναι ΟΚΒ του $V(2)$

$V(4) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,/\, x \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$: βάση του $V(4)$

$F_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$: ΟΚΒ του $V(4)$

κύριοι άξονες του q: $P'_B = \left\{ \vec{e}_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), \; \vec{e}_2' = (0,0,1), \; \vec{e}_3' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0) \right\}$

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ Τότε: $X = P \cdot X'$
Τότε:

$S = \{ (x',y',z') \in \mathbb{R}^3 / 2(x')^2 + 2(y')^2 + 4(z')^2 = 8 \} =$
$= \{ (x',y',z') \in \mathbb{R}^3 / \frac{(x')^2}{4} + \frac{(y')^2}{4} + \frac{(z')^2}{2} = 1 \}$:
: ελλειψοειδές

Άσκηση: $S = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 7x^2 + 7y^2 + 10z^2 - 2xy - 4xz + 4yz = 24 \}$

$q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$: $q(x,y,z) = 7x^2 + 7y^2 + 10z^2 - 2xy - 4xz + 4yz$
είναι σε τετραγωνική μορφή στον $\mathbb{R}^3$ με πίνακα στη στήλη ΟΚΒ του $\mathbb{R}^3$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -2 \\ -1 & 7 & 2 \\ -2 & 2 & 10 \end{pmatrix}, \quad P_A(t) = -(t-6)^2 \cdot (t-12)$$

Ιδιοτιμές του A: $\begin{cases} \lambda_1 = 6 \text{ (διπλή)} \\ \lambda_2 = 12 \text{ (απλή)} \end{cases}$

$\to$

$\cdot V(12): (A - 12I_3)X = 0 \Rightarrow V(12) = \left\{ x\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$: βάση του $V(12) \Rightarrow F_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$: ΟΚΒ του $V(12)$

$\cdot V(6): (A - 6I_3)X = 0 \Rightarrow V(6) = \left\{ x\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x,y \in \mathbb{R} \right\}$

$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix} \right\}$: βάση του $V(6)$ η οποία δεν είναι ΟΚΒ

Με τη διαδικασία Gram-Schmidt, αποκτούμε την ΟΚΒ του $V(6)$: $\left\{ F_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, F_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \right\}$

Οι κύριοι άξονες του q είναι:

$P_B' = \left\{ \vec{e}_1{}' = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2),\ \vec{e}_2{}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0),\ \vec{e}_3{}' = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1) \right\}$

και τότε: $q(x',y',z') = 12(x')^2 + 6(y')^2 + 6(z')^2 =$

$= S : \{(x',y',z') \in \mathbb{R}^3 \mid q(x',y',z') = 24\} =$

$= \left\{ (x',y',z') \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \frac{(x')^2}{2} + \frac{(y')^2}{4} + \frac{(z')^2}{4} = 1 \right\}$: ελλειψοειδ

$$P = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$